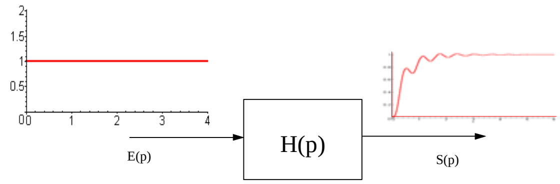
I - STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

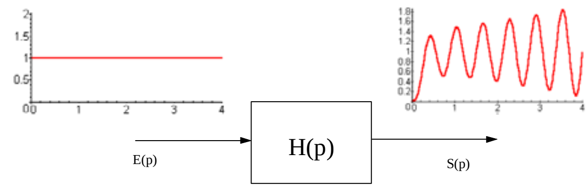
A. Position du problème et définitions

1. définition 1

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse d'un système stable



Réponse d'un système instable

2. définition 2

Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini.

3. Remarques :

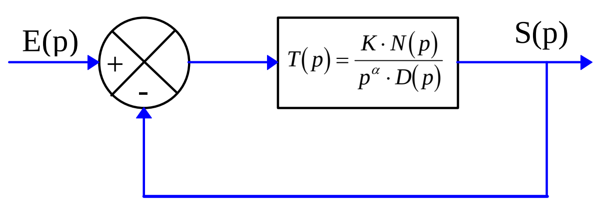
Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires.

Un système réel instable oscille jusqu'à la destruction, ces oscillations peuvent dans le cas général être limitées par les différentes saturations (limites des ampli-OP, butées physiques,...) et laisser croire que la sortie du système est bornée, le système ne peut plus être considéré comme linéaire. La première définition ne peut être utilisée.
Etudier la réponse libre d'un système, revient à écarter le système de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système instable a tendance à s'en écarter, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

4. Etude générale

a) Fonction de transfert

Dans la suite nous étudierons le problème de la stabilité à partir d'un système à retour unitaire, tout système pouvant être transformé en système à retour unitaire.



Soit un système asservi dont la fonction de transfert en boucle ouverte est $T(p)=\dfrac{K\cdot N(p)}{p^{\alpha}\cdot D(p)}$:

$N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes en p avec $N(0)=1$ et $D(0)=1$, et α la classe du système.

La fonction de transfert en boucle fermée est donc: $F(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{T(p)}{1+T(p)}$.

La fonction de transfert F(p) est un rapport de deux polynômes en p. Les racines du dénominateur (pôles de la fonction de transfert) sont soit réelles, soit complexes conjuguées.
La décomposition de F(p) en éléments simples est (si on suppose, pour simplifier l'étude, qu'il n'y a pas de racines multiples) donc de la forme :

$F(p)=\sum\frac{C}{p-c}+\sum\frac{A\cdot p+B}{(p-a)^2+b^2}$. C'est a dire une décomposition faisant apparaître les pôles réels et les pôles complexes.

b) Réponse temporelle

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant t=0 à une impulsion $e(t)=A_0.\delta(t)$ avec $\delta(t)$ impulsion de Dirac (rappel: la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est 1).

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}\Rightarrow S(p)=F(p)\cdot E(p)$$

$E(p)=\mathrm{L}\left(A_0\cdot\delta(t)\right)=A_0$ donc $S(p)=A_0\cdot F(p)$

La réponse temporelle s(t) est donc $s(t)=A_\circ f(t)$.

Compte tenu de la forme de F(p) la solution temporelle est de la forme :

$f(t)=\sum e^{c\cdot t}+\sum e^{a\cdot t}\cdot\sin(b\cdot t+\varphi)$, le premier terme pour les pôles réels, le deuxième pour les pôles imaginaires.

On voit que :

a) si les **parties réelles** sont toutes **négatives**, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielle amorties, la réponse tend vers zéro pour t tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le **système est stable.**

b) si une des **pôles réels est positif**, le système est instable :
le système est de type **divergent** exponentiel

c) si un des pôles complexes est à partie réelle **positive**, le système est instable
le système est de type oscillatoire **divergent**.

c) Remarques : cas des pôles nuls et imaginaires purs

(1) Pole réel double

Si la fonction de transfert possèdent un terme de la forme $\frac{1}{p^2}$, alors0 est un pôle double. Ce pole réel entraîne une solution temporelle de la forme $L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)=t$ qui tend donc vers **l'infini**, le système est instable.

(2) Pole imaginaire pur ($p=\pm j\cdot\omega$) double

Si la décomposition fait apparaître un terme de la forme : $\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$, $\div j\cdot\omega$ est un pôle imaginaire pur double.

La solution temporelle est de la forme :

$L^{-1}\left(\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}\right)=\frac{1}{2\cdot\omega^2}\left(\sin\omega\cdot t-\omega\cdot t\cdot\cos\omega\cdot t\right)$, le système diverge

(3) Pole réel nul simple :

Le système possède un terme de la forme $\frac{1}{p}$, le système ne retourne pas dans sa position d'équilibre, mais ne s'en écarte pas on plus, $L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \bullet u(t)$.

(4) Pole imaginaire pur simple

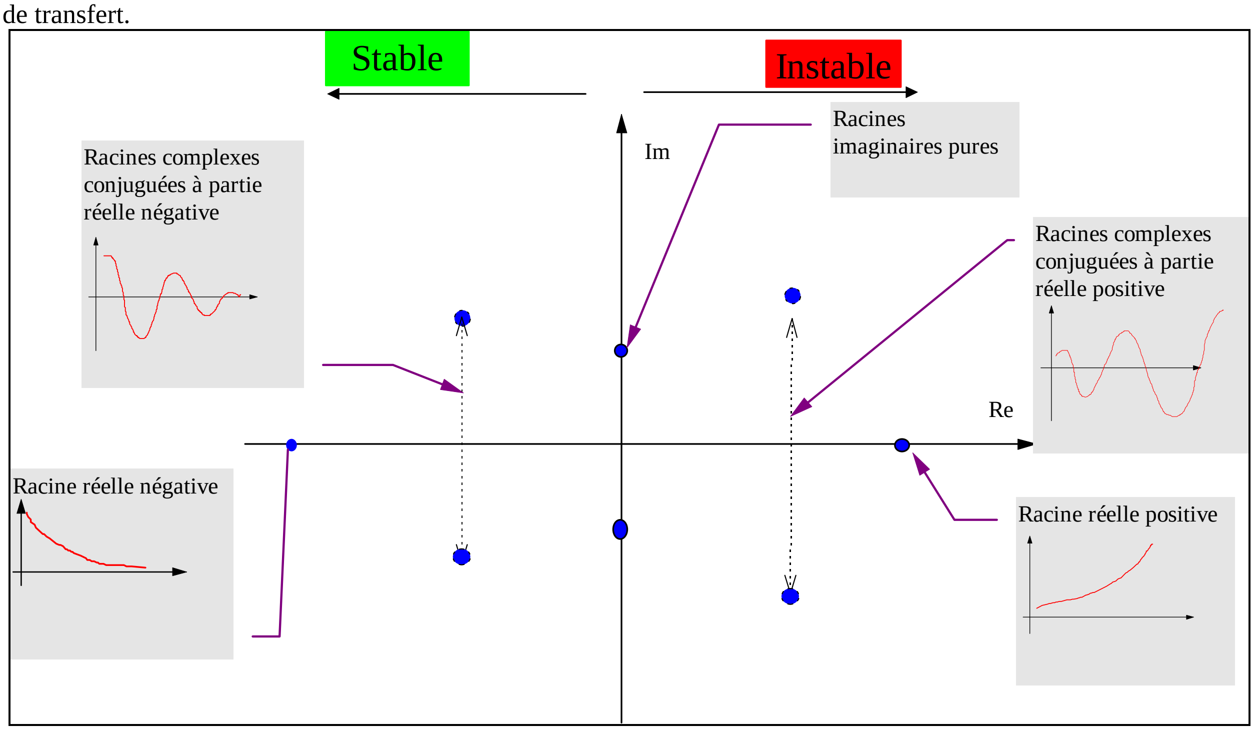
Si la décomposition fonctionnelle comporte le terme $\frac{1}{p^2+\omega^2}$, la solution temporelle est de la forme :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)}\right) = \frac{1}{\omega}\sin\omega \cdot t .$$

Le système est un système oscillant pur de pulsation ω. Le système ne diverge pas mais oscille toujours. La sortie est donc bornée !. On dit que le système est juste instable

5. Condition de stabilité

On peut écrire une nouvelle condition de stabilité d'un système
Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.
La position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne donc sur la stabilité de la fonction de transfert.



B.

Critères de stabilité

1. Critères algébriques

Le critère de Routh est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation $1+T(p)=0$ pour les déterminer.

$$F(p)=\frac{T(p)}{1+T(p)}=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{A_m\cdot p^m+A_{m-1}\cdot p^{m-1}+..+A_1\cdot p^1+A_0}{B_n\cdot p^n+B_{n-1}\cdot p^{n-1}+..+B_1\cdot p^1+B_0}$$

on en déduit l'équation caractéristique suivante : $D(p)=B_n\cdot p^n+B_{n-1}\cdot p^{n-1}+..+B_1\cdot p^1+B_0=0$.

a) Condition nécessaire

Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique sont du même signe que B_n.

Cette condition est une condition suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre.

b) Critère de Routh

La règle de Routh permet de déterminer le signe des racines d'un polynômes. pour cela on construit le tableau ci dessous

On s'arrange pour que B_n soit positif

p^n	B_n	B_{n-2}	B_{n-4}	- - - - - - - -	B_2	B_0
p^{n-1}	B_{n-1}	B_{n-3}	B_{n-5}	- - - - - - - -	B_1	
p^{n-2}	c_1	c_2	c_3	- - - - - - - -		
p^{n-3}	d_1	d_2		- - - - - - - -		
				- - - - - - - -		
p^1	p_1			- - - - - - - -		
1	r_0					

Les deux premières lignes sont constituées des coefficients du polynômes

Les coefficients de la troisième ligne sont calculés comme suit

$$c_1=\frac{-1}{B_{n-1}}\cdot\begin{vmatrix}B_n & B_{n-2}\\ B_{n-1} & B_{n-3}\end{vmatrix}=\frac{-(B_n\cdot B_{n-3}-B_{n-1}\cdot B_{n-2})}{B_{n-1}}$$

$$c_2=\frac{-1}{B_{n-1}}\cdot\begin{vmatrix}B_n & B_{n-4}\\ B_{n-1} & B_{n-5}\end{vmatrix}$$

de la même manière pour les termes des lignes suivantes :

$$d_1=\frac{-1}{c_1}\cdot\begin{vmatrix}B_{n-1} & B_{n-3}\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\ \text{et ainsi de suite}\ d_2=\frac{-1}{c_1}\cdot\begin{vmatrix}B_{n-1} & B_{n-5}\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}$$

On continue cette procédure jusqu'à épuisement

La première colonne est appelée colonne des pivots et le terme c_1 est le pivot de la quatrième ligne.

(1) Enoncé du critère de Routh

Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont positifs (en fait du même signe que B_n).

Il y a autant de racines à partie réelles positives que de changement de signe.

Une ligne de zéro indique l'existence de racines imaginaires pures

(2) Remarque 1

Un ligne de zéro implique la présence d'une racine imaginaire pure, le système est donc juste instable, pour pouvoir continuer l'analyse, il est nécessaire de continuer le tableau avec le polynôme reconstitué à partir des coefficients de la ligne précédente, ce polynôme est ensuite dérivé par rapport à la variable p pour poursuivre le tableau.

ex

p^m	a_1	a_2	a_3	......	
p^{m-1}	0	0	0		les coefficients de rang m+1 sont nuls $\Rightarrow$ racine imaginaire pure
p^{m-1}	ma_1	$+(m-1)a_2$	$(m-2)a_3$		Polynôme reconstitué
p^{m-2}	...	....	...		

Polynôme de rang m

$P_m(p)=a_1.p^m+a_2p^{m-1}+a_3.p^{m-2}+...$

On construit le polynôme dérivé et on remplace le rang m+1 par ce polynôme.

$P_{m+1}(p)= P_m(p)'=ma_1.p^{m-1}+(m-1)a_2p^{m-2}+(m-2)a_3.p^{m-3}+...$

(3) Remarque 2

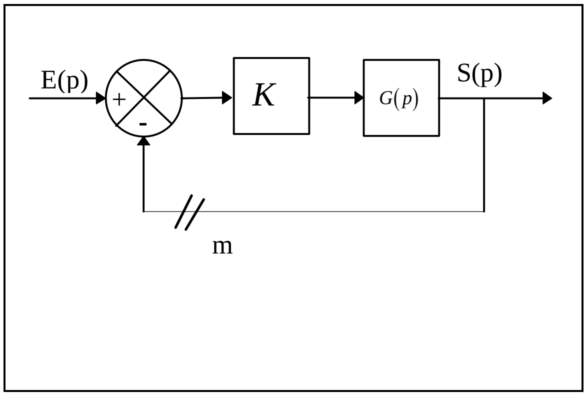
Le critère de Routh, est un critère de stabilité absolue, il ne permet pas de préciser les marges de stabilité du système.

2. Critères graphiques

Les critères graphiques de stabilité permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de l'étude fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte FTB0 d'un système à retour unitaire :

$$O(p)=\frac{m(p)}{E(p)}=K\cdot G(p)$$

FTBF : $F(p)=\dfrac{O(p)}{1+O(p)}=\dfrac{K\cdot G(p)}{1+K\cdot G(p)}$



Nous avons vu que l'étude de la stabilité se résume à la recherche des racines du dénominateur.

$1+K\cdot G(p)=0$ on peut aussi écrire cette condition sous la forme $K\cdot G(p)=-1$.

La position de la fonction de transfert en boucle ouverte par rapport au point -1 nous renseigne sur la stabilité du système

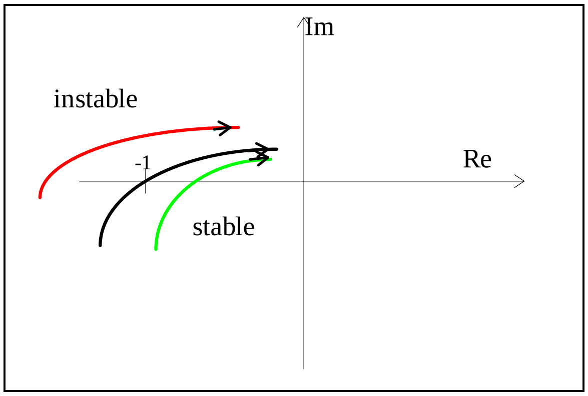
a) Critère du revers

(1) A partir du diagramme de Nyquist,

Dans le plan de Nyquist, le point critique a pour coordonnées (-1,0).

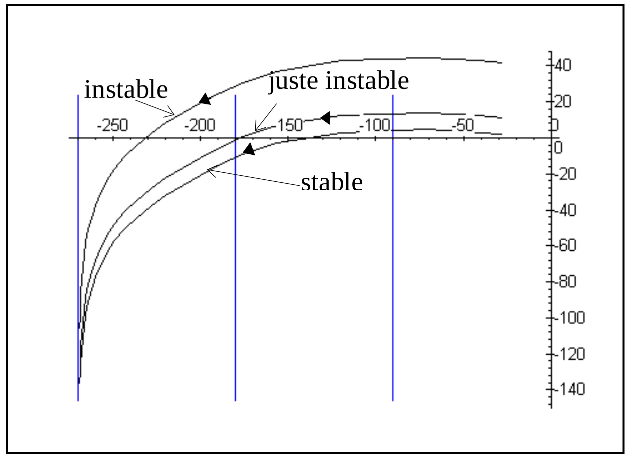
Enoncé du critère du revers

Un système asservis linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert dans le plan de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte, on laisse le point critique sur la gauche. Il est instable dans le cas contraire



(2) A partir du diagramme de Black

Dans le plan de Black, le point critique a pour coordonnées (-180°,0).
énoncé
Un système asservis linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert dans le plan de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, on laisse le point critique sur la droite. Il est instable dans le cas contraire

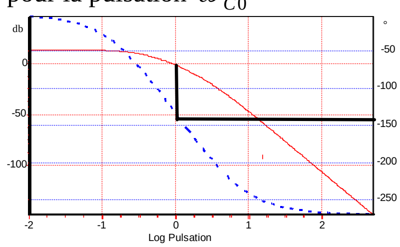
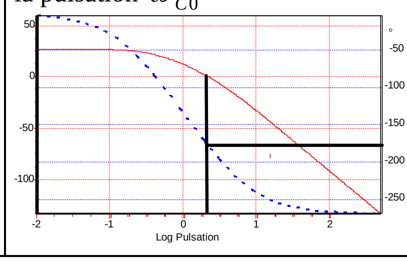
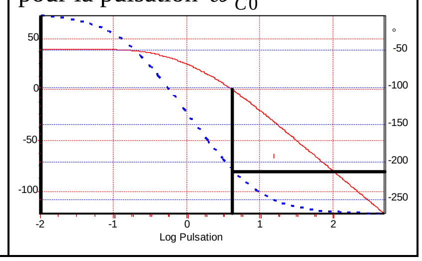


(3) Dans le plan de Bode

L'énoncé du critère du revers est en fait la vérification pour la pulsation ω_{C0} des deux conditions ci-contre
Le respect de cette double condition permet d'énoncé le critère du revers dans le plan de Bode

$$\begin{cases} \left|O\left(j\cdot\omega_{CO}\right)\right| = 1 \\ Arg\left(O\left(j\cdot\omega_{CO}\right)\right) \geq -180° \end{cases}$$

énoncé
Un système asservi est stable si, à la pulsation ω_{C0} pour laquelle $\left|O\left(j\cdot\omega_{CO}\right)\right| = 1$ (donc $20.\log\left(\left|O\left(j\cdot\omega_{CO}\right)\right|\right) = 0dB$), le déphasage est supérieur à -180°.

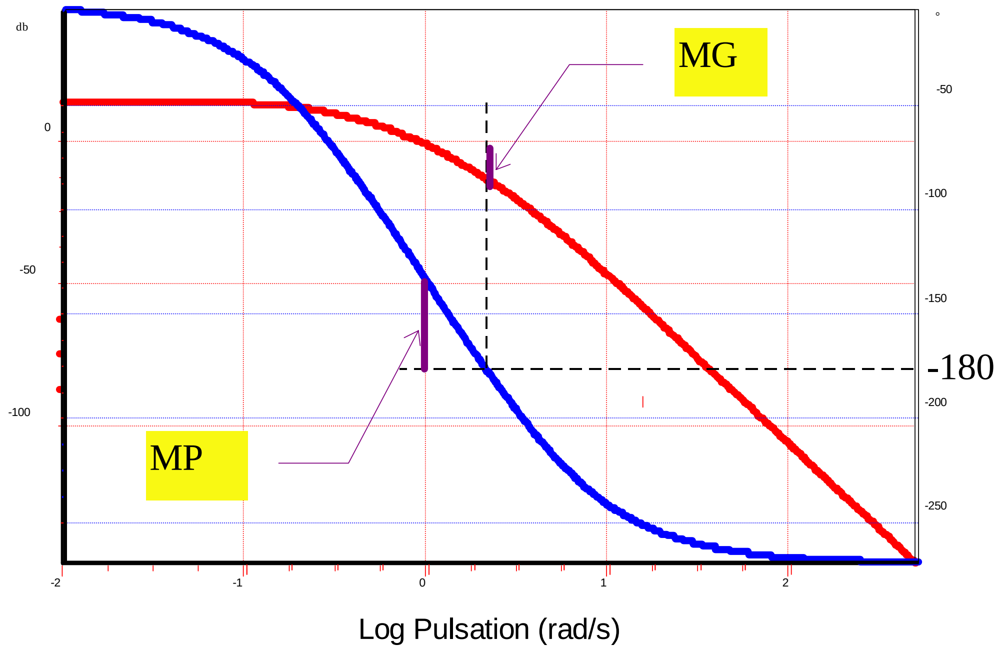
Système stable	**Système juste instable**	**Système instable**
le déphasage est supérieur à -180° pour la pulsation ω_{C0} 	le déphasage est égal à -180° pour la pulsation ω_{C0} 	le déphasage est inférieur à -180° pour la pulsation ω_{C0} 

C. Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolu, ces critères ne permettent pas en général de régler un système, il faut pour cela définir des marges de stabilité, c'est à dire une distance à respecter entre le point critique (-1) et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte. On définit la marge de Gain et la marge de Phase
Les valeurs usuelles de marges de gain et de marge de phase permettant le réglage sont :
Marge de Gain : 10dB
Marge de Phase :45°

1. A partir des diagrammes de Bode

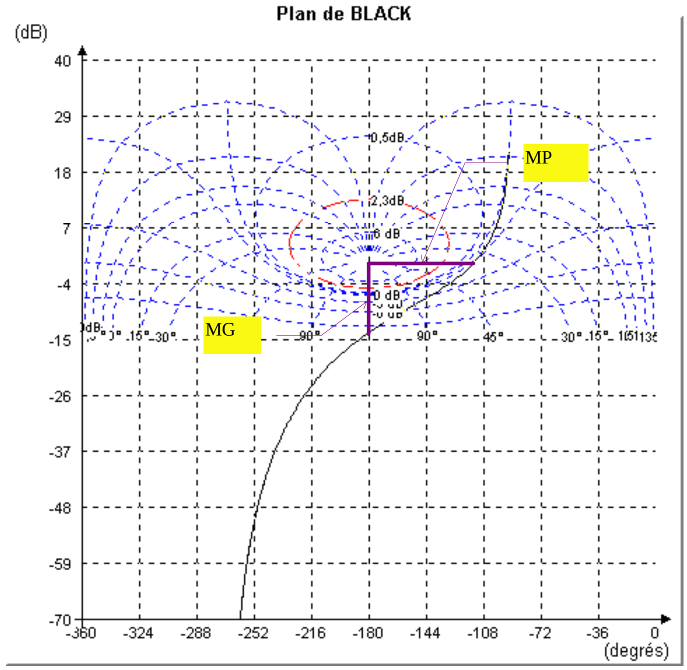
Marge de Gain (MG)
On détermine la pulsation pour laquelle le déphasage est de -180° ω_{-180} , la marge de gain est la distance (en dB) entre la courbe et l'axe des abscisses.
Marge de Phase (MP)
Pour la pulsation w_{C0} , on mesure la distance entre la courbe de phase et -180°



2. A partir du diagramme de Black

Marge de Gain:
c’est la distance entre l’intersection du lieu de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte avec la droite d’argument -180° et le point critique d’affixe (-180°,0dB).

Marge de Phase
C’est la distance entre l’intersection du lieu de Black avec l’axe des abscisses et le point critique.

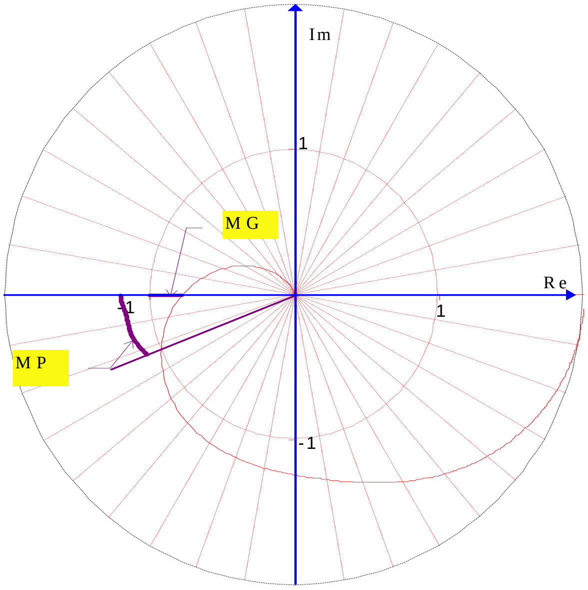


3. à partir du diagramme de Nyquist

Marge de Gain:
distance entre le point critique et l’intersection du lieu de Nyquist avec l’axe des réels.

Marge de Phase

Angle entre l'axe des réel (-∞) et $\overrightarrow{OM_{CO}}$, M_{CO} , le point de pulsation ω_{C0}



4. Facteur de résonance

Un moyen de d'assurer une marge de stabilité, est de limiter la résonance, la valeur usuelle de réglage est $Q_{dB} = 2{,}3dB$,

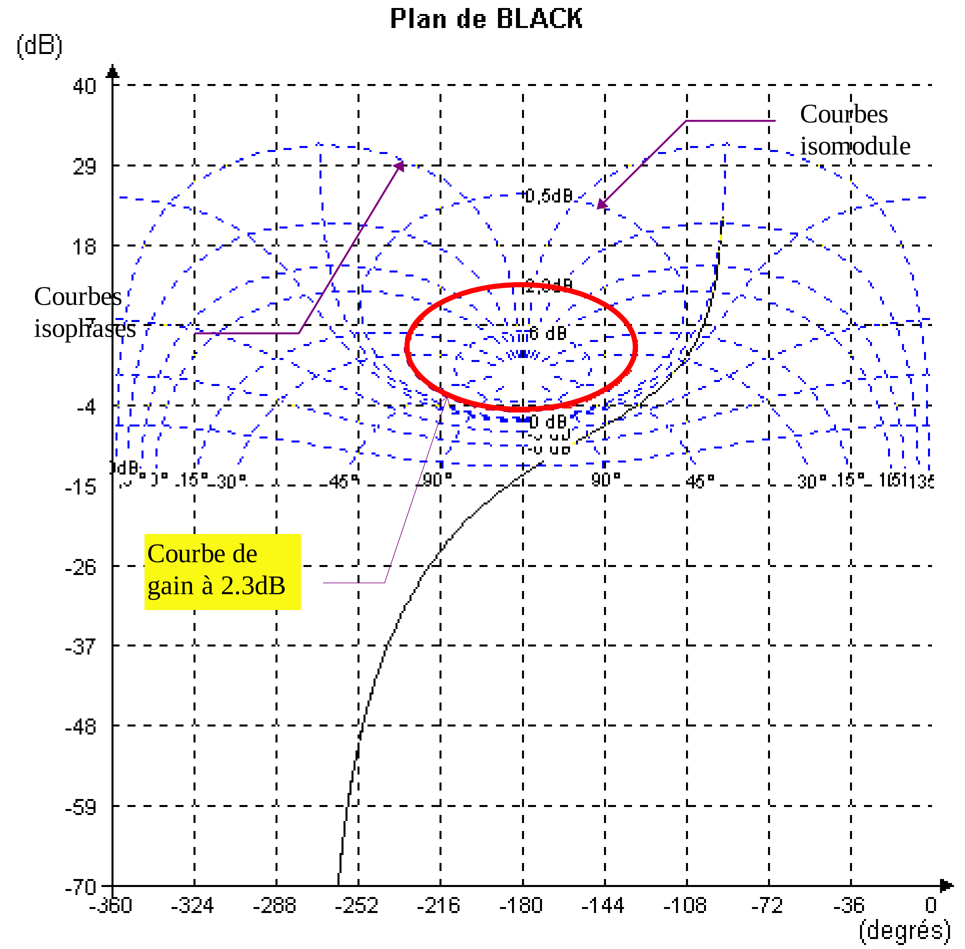
Le diagramme de Black permet de déterminer l'amplitude de la fonction de transfert en boucle fermée à partir du lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Les courbes tracées sur le diagrammes de black sont le module et l'argument de $\frac{z}{1+z}$, l'ensemble de ces courbes représente l' abaque de black

La relation entre la FTBO et la FTBF est pour un système à retour unitaire : $FTBF = \frac{FTBO}{1+FTBO}$, on peut donc à partir de la lecture pour chaque point de la FTBO, de l'intersection avec les courbes isomodules et isophases, déterminer le module et l'argument de la FTBF

Le réglage du système asservi sera correct si le contour de la FTBO est tangent au contour à 2,3dB.

Le point de tangence de la FTBO avec un contour d'amplitude est le point de résonance du système.



Courbes isomodules : $\left|\dfrac{z}{1+z}\right| = cte$

Courbes isophases $Arg\left(\dfrac{z}{1+z}\right) = cte$

index